

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos
2001

1.ª FASE
1.ª CHAMADA
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de dez.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

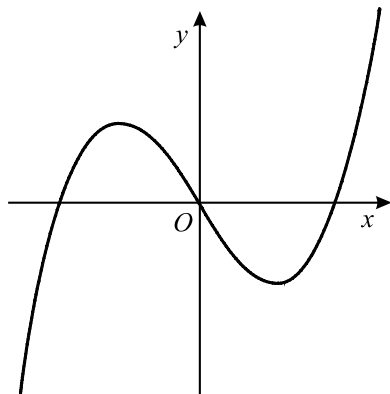
1. De uma função f , contínua no intervalo $[1, 3]$, sabe-se que $f(1) = 7$ e $f(3) = 4$. Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?
- (A) A função f tem pelo menos um zero no intervalo $[1, 3]$
(B) A função f não tem zeros no intervalo $[1, 3]$
(C) A equação $f(x) = 5$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1, 3]$
(D) A equação $f(x) = 5$ não tem solução no intervalo $[1, 3]$
2. Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real positivo a , igual a $e^{2\ln a}$?
(\ln designa logaritmo de base e)
- (A) $2a$ (B) $2 + a$ (C) 2^a (D) a^2
3. A recta de equação $y = x$ é tangente ao gráfico de uma certa função f , no ponto de abscissa 0. Qual das seguintes expressões pode definir a função f ?
- (A) $x^2 + x$ (B) $x^2 + 2x$ (C) $x^2 + 2x + 1$ (D) $x^2 + x + 1$

4. Seja g uma função, de domínio \mathbb{R} , tal que a sua **segunda derivada** é definida por

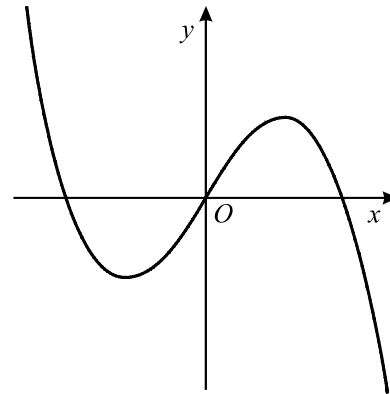
$$g''(x) = 1 - x^2$$

Em qual das figuras seguintes poderá estar parte da representação gráfica da **função g** ?

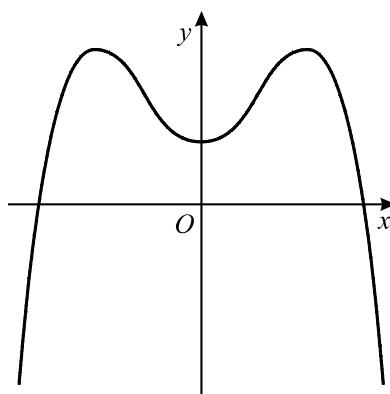
(A)



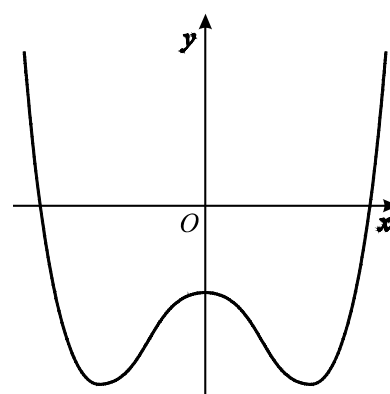
(B)



(C)



(D)



5. *Capicua* é uma sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita dá o mesmo número.

Por exemplo, 75957 e 30003 são *capicuas*.

Quantas *capicuas* existem com cinco algarismos, sendo o primeiro algarismo ímpar ?

- (A) 300 (B) 400 (C) 500 (D) 600

6. Uma caixa tem cinco bombons, dos quais apenas dois têm licor. Tira-se da caixa, ao acaso, uma amostra de três bombons. Considere que X designa a variável «*número de bombons **com licor** existentes nessa amostra*».

Qual das seguintes distribuições de probabilidades pode ser a da variável X ?

(A)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{{}^5C_3}$	$\frac{6}{{}^5C_3}$	$\frac{3}{{}^5C_3}$

(B)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{{}^5C_3}$	$\frac{6}{{}^5C_3}$	$\frac{1}{{}^5C_3}$

(C)

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{{}^5C_3}$	$\frac{6}{{}^5C_3}$	$\frac{3}{{}^5C_3}$

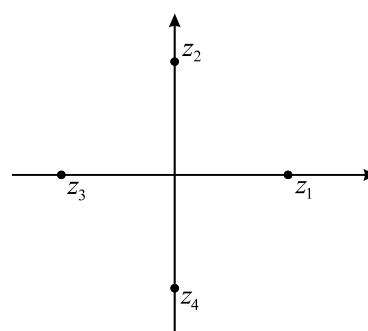
(D)

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{{}^5C_3}$	$\frac{6}{{}^5C_3}$	$\frac{1}{{}^5C_3}$

7. Seja w um número complexo diferente de 0, cuja imagem geométrica, no plano complexo, está no primeiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Seja \overline{w} o conjugado de w .

Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos: z_1 , z_2 , z_3 e z_4 .



Qual deles pode ser igual a $\frac{w}{\overline{w}}$?

- (A) z_1 (B) z_2 (C) z_3 (D) z_4

Grupo II

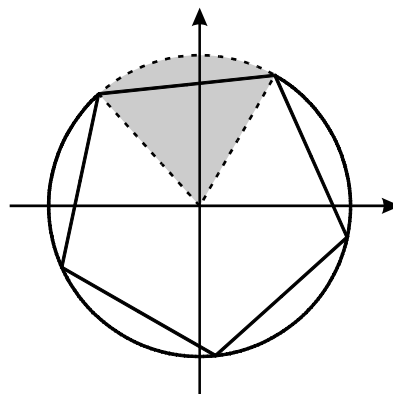
Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, seja $z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$

1.1. Sem recorrer à calculadora, verifique que $\frac{z_1^3 + 2}{i}$ é um imaginário puro.

1.2. No plano complexo, a imagem geométrica de z_1 é um dos cinco vértices do pentágono regular representado na figura. Este pentágono está inscrito numa circunferência centrada na origem do referencial. Defina, por meio de uma condição em \mathbb{C} , a região sombreada, excluindo a fronteira.



2. Considere a função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = 3x - 2 \ln x$ (\ln designa logaritmo de base e).

2.1. Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as duas alíneas seguintes.

2.1.1. Estude f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

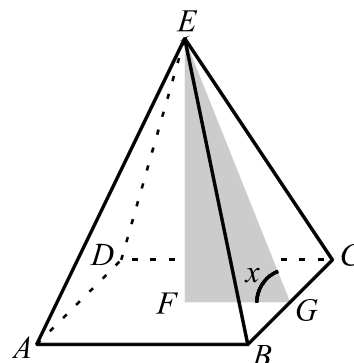
2.1.2. Mostre que a função f tem um único mínimo.

2.2. O gráfico de f contém um único ponto cuja ordenada é o quadrado da abcissa. Recorrendo à calculadora, determine um valor aproximado para a abcissa desse ponto (apresente o resultado arredondado às décimas). Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

3. Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- A base da pirâmide tem centro F e lado 2
- G é o ponto médio da aresta $[BC]$
- x designa a amplitude do ângulo FGE



- 3.1. Mostre que a área total da pirâmide é dada, em função de x , por

$$A(x) = \frac{4 \cos x + 4}{\cos x} \quad \left(x \in]0, \frac{\pi}{2}[\right)$$

- 3.2. Calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} A(x)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

4. Num saco existem quinze bolas, indistinguíveis ao tacto.

Cinco bolas são amarelas, cinco são verdes e cinco são brancas.

Para cada uma das cores, as bolas estão numeradas de 1 a 5.

- 4.1. Retirando todas as bolas do saco e dispondo-as, ao acaso, numa fila, qual é a probabilidade de as bolas da mesma cor ficarem todas juntas?

Apresente o resultado na forma de dízima, com sete casas decimais.

- 4.2. Suponha agora que, no saco, estão apenas **algumas** das quinze bolas.

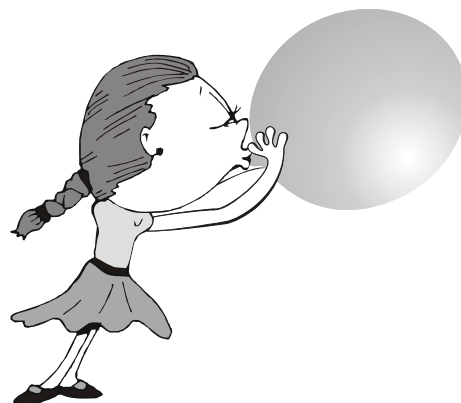
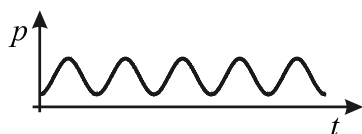
Nestas novas condições, admita que, ao retirarmos, ao acaso, uma bola do saco, se tem:

- a probabilidade de essa bola ser amarela é 50 %
- a probabilidade de essa bola ter o número 1 é 25 %
- a probabilidade de essa bola ser amarela ou ter o número 1 é 62,5 %

Prove que a bola amarela número 1 está no saco.

5. A Joana está a encher um balão.

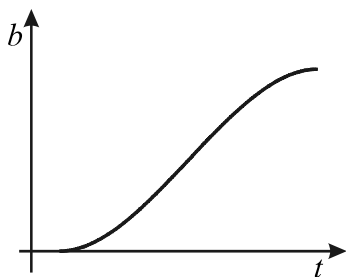
Na figura abaixo está o gráfico da função que dá a massa p de ar, nos pulmões da Joana, t segundos após o instante em que ela, pela primeira vez, começa a inspirar o ar, para encher o balão.



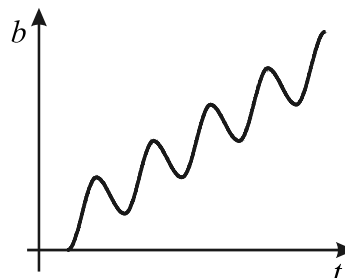
Para encher o balão, a Joana precisa de inspirar várias vezes, mas, de cada vez que inspira, mantém o pipo apertado, evitando assim que o ar saia do balão.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função que dá a massa b de ar no balão, t segundos após o referido instante (aquele em que, pela primeira vez, a Joana começa a inspirar o ar, para encher o balão)?

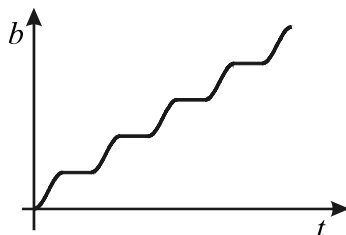
(A)



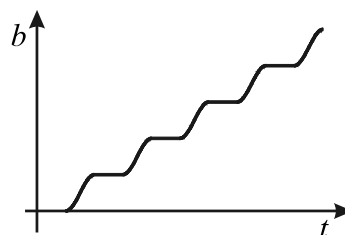
(B)



(C)



(D)



Numa pequena composição, de dez a quinze linhas, aproximadamente, justifique a sua resposta.

Note bem:

Não explique por que razão considera adequado o gráfico por si escolhido como correcto. Deve limitar-se a explicar por que é que os outros três estão incorrectos, apresentando, para cada um deles, uma razão pela qual o rejeita.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I63

Cada resposta certa +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:

Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II137

1. 21
 1.1. 11
 1.2. 10

2. 43
 2.1. 30
 2.1.1. 15
 2.1.2. 15
 2.2. 13

3. 26
 3.1. 13
 3.2. 13

4. 32
 4.1. 16
 4.2. 16

5. 15

TOTAL 200

Formulário

Áreas de figuras planas

$$\text{Losango: } \frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$$

$$\text{Trapézio: } \frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$$

$$\text{Polígono regular: } \text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$$

$$\text{Círculo: } \pi r^2 \quad (r - \text{raio})$$

Áreas de superfícies

$$\text{Área lateral de um cone: } \pi r g \\ (r - \text{raio da base; } g - \text{geratriz})$$

$$\text{Área de uma superfície esférica: } 4 \pi r^2 \\ (r - \text{raio})$$

Volumes

$$\text{Prisma: } \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Cilindro: } \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Pirâmide: } \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Cone: } \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Esfera: } \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (r - \text{raio})$$

Trigonometria

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

Complexos

$$(\rho \text{ cis } \theta) \cdot (\rho' \text{ cis } \theta') = \rho \rho' \text{ cis } (\theta + \theta')$$

$$\frac{\rho \text{ cis } \theta}{\rho' \text{ cis } \theta'} = \frac{\rho}{\rho'} \text{ cis } (\theta - \theta')$$

$$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n \theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

$$\text{Prog. Aritmética: } \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

$$\text{Prog. Geométrica: } u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Regras de derivação

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\text{sen } u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \text{sen } u$$

$$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$