

## EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)  
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos  
2002

1.ª FASE  
2.ª CHAMADA  
VERSÃO 1

### PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

---

## VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

**Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.**

## Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. De uma função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , sabe-se que:

- $f(5) = 0$
- $f$  é uma função par

Seja  $g$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = f(x + 3)$ .

Qual dos seguintes pode ser o conjunto dos zeros de  $g$ ?

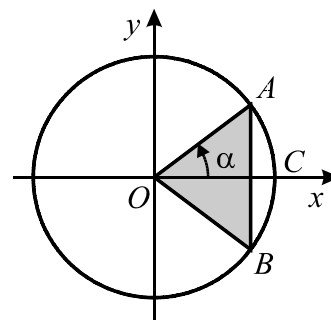
- (A)  $\{0, 3\}$                       (B)  $\{3, 5\}$                       (C)  $\{-8, 2\}$                       (D)  $\{2, 8\}$

2. Na figura estão representados, em referencial o. n.  $xOy$ , o círculo trigonométrico e um triângulo  $[OAB]$ .

Os pontos  $A$  e  $B$  pertencem à circunferência.

O segmento  $[AB]$  é perpendicular ao semieixo positivo  $Ox$ .

O ponto  $C$  é o ponto de intersecção da circunferência com o semieixo positivo  $Ox$ .



Seja  $\alpha$  a amplitude do ângulo  $COA$ .  $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \right)$

Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo  $[OAB]$ , em função de  $\alpha$ ?

- (A)  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$                       (B)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha}{2}$   
(C)  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha$                       (D)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha}{2}$

3. De uma função  $h$ , de domínio  $\mathbb{R}^-$ , sabe-se que a recta de equação  $y = 2$  é assíntota do seu gráfico.

Qual é o valor de  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{e^x}$  ?

- (A)  $+\infty$                       (B)  $-\infty$                       (C) 0                      (D) 2

4. Na figura está representado, em referencial o. n.  $Oxyz$ , um cilindro de revolução.

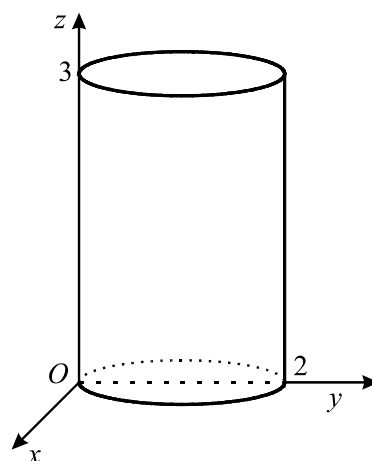
Tem-se que:

- a altura do cilindro é 3
- uma das bases está contida no plano  $xOy$ , sendo o seu centro o ponto  $(0, 1, 0)$  e o seu raio igual a 1

Seja  $b \in ]0, 2[$  e seja  $f$  a função que, a cada valor de  $b$ , faz corresponder o perímetro da secção produzida no cilindro pelo plano de equação  $y = b$ .

Qual é o máximo da função  $f$  ?

- (A) 9                      (B) 10                      (C) 11                      (D) 12



5. Na figura estão representados os gráficos de duas distribuições normais.

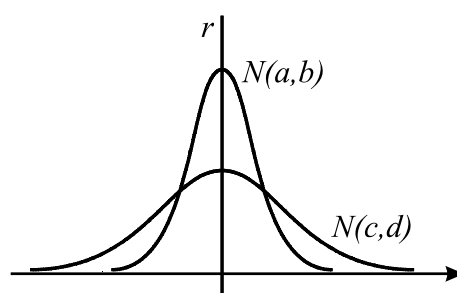
Uma das distribuições tem valor médio  $a$  e desvio padrão  $b$ .

A outra distribuição tem valor médio  $c$  e desvio padrão  $d$ .

Os gráficos são simétricos em relação à mesma recta  $r$ .

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A)  $a = c$  e  $b > d$                       (B)  $a = c$  e  $b < d$   
 (C)  $a > c$  e  $b = d$                       (D)  $a < c$  e  $b = d$



6. O João utiliza, por vezes, o autocarro para ir de casa para a escola.

Seja  $A$  o acontecimento: «O João vai de autocarro para a escola».

Seja  $B$  o acontecimento: «O João chega atrasado à escola».

Uma das igualdades abaixo indicadas traduz a seguinte afirmação: «Metade dos dias em que vai de autocarro para a escola, o João chega atrasado».

Qual é essa igualdade?

(A)  $P(A \cap B) = 0,5$

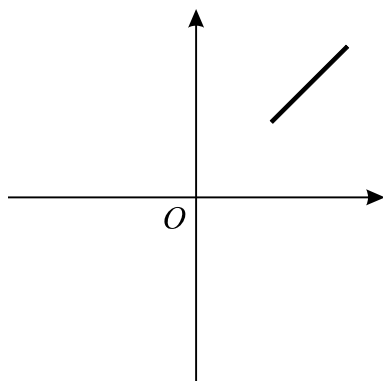
(B)  $P(A \cup B) = 0,5$

(C)  $P(A|B) = 0,5$

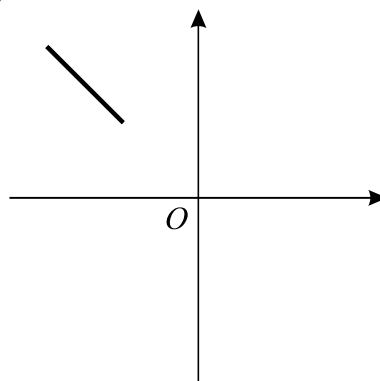
(D)  $P(B|A) = 0,5$

7. Qual das figuras seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto  $\{z \in \mathbb{C} : |z + 1| = |z - i| \wedge 2 \leq \text{Im}(z) \leq 4\}$  ?

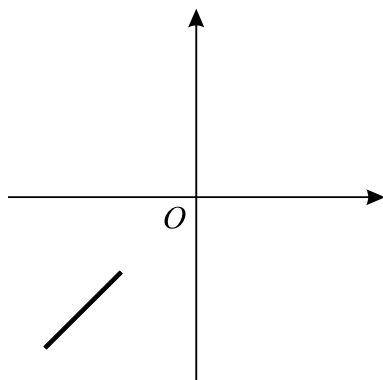
(A)



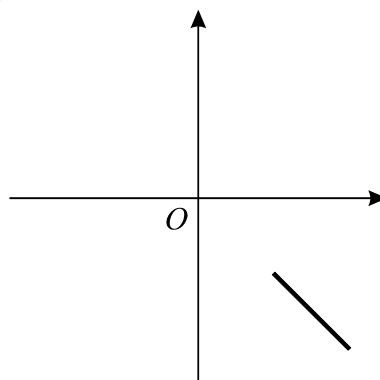
(B)



(C)



(D)



## Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

**Atenção:** quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

**1.** De dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$  sabe-se que:

- um argumento de  $z_1$  é  $\frac{\pi}{3}$
- o módulo de  $z_2$  é 4

**1.1.** Seja  $w = \frac{-1+i}{i}$

Justifique que  $w$  é diferente de  $z_1$  e de  $z_2$

**1.2.**  $z_1$  e  $z_2$  são duas das raízes quartas de um certo número complexo  $z$ .

Sabendo que, no plano complexo, a imagem geométrica de  $z_2$  pertence ao segundo quadrante, determine  $z_2$  na forma algébrica.

**2.** O nível  $N$  de um som, medido em decibéis, é função da sua **intensidade**  $I$ , medida em watt por metro quadrado, de acordo com a igualdade

$$N = 10 \log_{10}(10^{12} I), \quad \text{para } I > 0$$

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes.

**2.1.** Verifique que  $N = 120 + 10 \log_{10} I$

**2.2.** Admita que o nível de ruído de um avião a jacto, ouvido por uma pessoa que se encontra na varanda de um aeroporto, é de 140 decibéis.

Determine a intensidade desse som, em watt por metro quadrado.

- 3.** De uma função  $f$ , de domínio  $[-\pi, \pi]$ , sabe-se que a sua **derivada**  $f'$  está definida igualmente no intervalo  $[-\pi, \pi]$  e é dada por

$$f'(x) = x + 2 \cos x$$

- 3.1.** Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

**3.1.1.** Determine o valor de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

- 3.1.2.** Estude a função  $f$  quanto às concavidades do seu gráfico e determine as abcissas dos pontos de inflexão.

- 3.2.** O gráfico de  $f$  contém um único ponto onde a recta tangente é paralela ao eixo  $Ox$ . Recorrendo à sua calculadora, determine um valor arredondado às centésimas para a abcissa desse ponto.  
Explique como procedeu.

- 4.** Seja  $f$  uma função contínua, de domínio  $[0, 5]$  e contradomínio  $[3, 4]$ .

Seja  $g$  a função, de domínio  $[0, 5]$ , definida por  $g(x) = f(x) - x$ .

Prove que a função  $g$  tem, pelo menos, um zero.

- 5.** Considere todos os números de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9.

**5.1.** Escolhe-se, ao acaso, um desses números.

**5.1.1.** Determine a probabilidade de o número escolhido ter exactamente dois algarismos iguais a 1. Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

**5.1.2.** Determine a probabilidade de o número escolhido ter os algarismos todos diferentes e ser maior do que 9 800. Apresente o resultado na forma de dízima, com três casas decimais.

**5.2.** Considere o seguinte problema:

*«De todos os números de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9, alguns deles cumprem as três condições seguintes:*

- *começam por 9;*
- *têm os algarismos todos diferentes;*
- *a soma dos quatro algarismos é par.*

*Quantos são esses números?»*

Uma resposta correcta a este problema é  $3 \times 4 \times {}^4A_2 + {}^4A_3$

Numa pequena composição, com cerca de vinte linhas, explique porquê.

**FIM**



## COTAÇÕES

**Grupo I .....63**

Cada resposta certa ..... +9  
Cada resposta errada..... - 3  
Cada questão não respondida ou anulada ..... 0

**Nota:** um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

**Grupo II .....137**

1. .... 21  
    1.1. .... 10  
    1.2. .... 11

2. .... 28  
    2.1. .... 13  
    2.2. .... 15

3. .... 41  
    3.1. .... 26  
        3.1.1. .... 10  
        3.1.2. .... 16  
    3.2. .... 15

4. .... 15

5. .... 32  
    5.1. .... 16  
        5.1.1. .... 8  
        5.1.2. .... 8  
    5.2. .... 16

**TOTAL ..... 200**



## Formulário

### Áreas de figuras planas

Losango:  $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio:  $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular:  $Semiperímetro \times Apótema$

Círculo:  $\pi r^2$  ( $r$  – raio)

### Áreas de superfícies

Área lateral de um cone:  $\pi r g$   
( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

Área de uma superfície esférica:  $4 \pi r^2$   
( $r$  – raio)

### Volumes

Prisma:  $Área\ da\ base \times Altura$

Cilindro:  $Área\ da\ base \times Altura$

Pirâmide:  $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone:  $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera:  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ( $r$  – raio)

### Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

### Complexos

$$(\rho \operatorname{cis} \theta) \cdot (\rho' \operatorname{cis} \theta') = \rho \rho' \operatorname{cis} (\theta + \theta')$$

$$\frac{\rho \operatorname{cis} \theta}{\rho' \operatorname{cis} \theta'} = \frac{\rho}{\rho'} \operatorname{cis} (\theta - \theta')$$

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis} (n \theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n-1\}$$

### Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma

Prog. Aritmética:  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica:  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

### Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

### Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$