

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos
2002

2.ª FASE
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

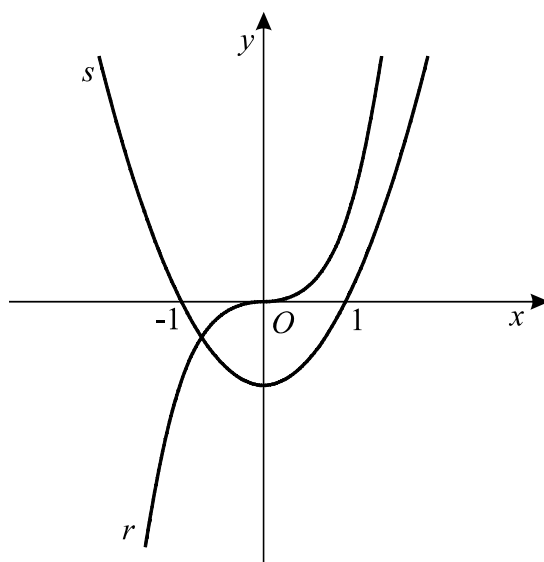
- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de dez.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Na figura estão parcialmente representados os gráficos de duas funções polinomiais, r e s .



Qual dos seguintes conjuntos pode ser o domínio da função $\frac{r}{s}$?

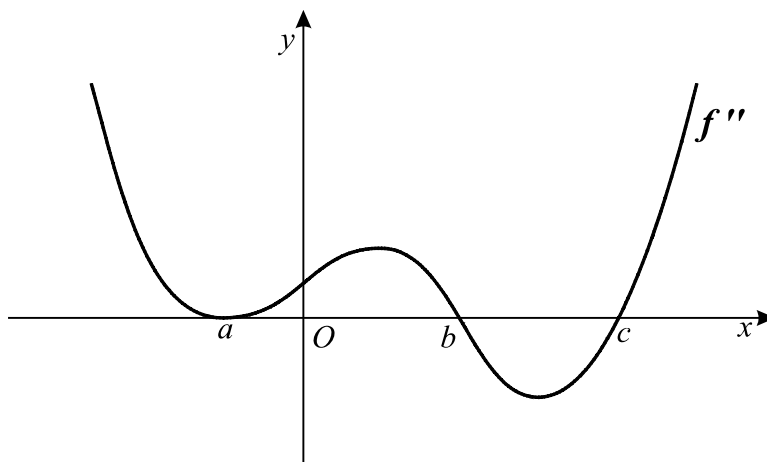
(A) \mathbb{R}

(B) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

(C) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

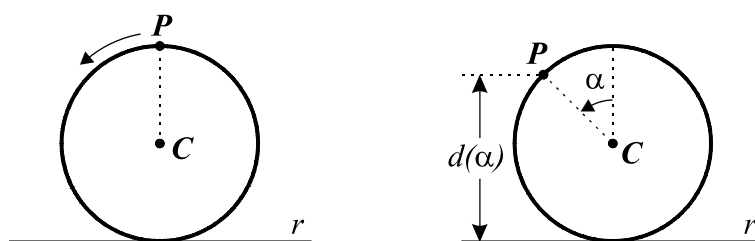
(D) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

2. Seja f uma função de domínio \mathbb{R} .
Na figura está representada parte do gráfico de f'' , **segunda derivada** da função f .



Relativamente ao gráfico da **função f** , qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) O ponto de abcissa a é um ponto de inflexão.
 - (B) O ponto de abcissa c é um ponto de inflexão.
 - (C) A concavidade está voltada para baixo no intervalo $[0, b]$.
 - (D) A concavidade está sempre voltada para cima.
3. Considere uma circunferência de centro C e raio 1, tangente a uma recta r .
Um ponto P começa a deslocar-se sobre a circunferência, no sentido indicado na figura. Inicialmente, o ponto P encontra-se à distância de 2 unidades da recta r .



Seja $d(\alpha)$ a distância de P a r , após uma rotação de amplitude α .

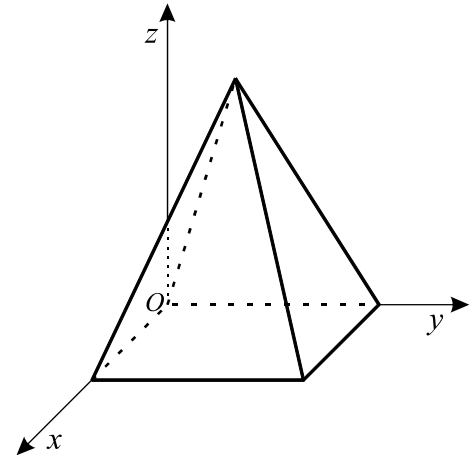
Qual das igualdades seguintes é verdadeira para qualquer número real positivo α ?

- (A) $d(\alpha) = 1 + \cos \alpha$
- (B) $d(\alpha) = 2 + \sin \alpha$
- (C) $d(\alpha) = 1 - \cos \alpha$
- (D) $d(\alpha) = 2 - \sin \alpha$

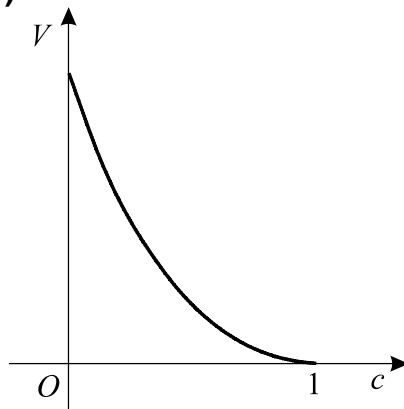
4. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular, de altura 1, cuja base está contida no plano xOy .

Para cada $c \in [0, 1]$, seja $V(c)$ o volume da parte da pirâmide constituída pelos pontos cuja cota é **superior ou igual** a c .

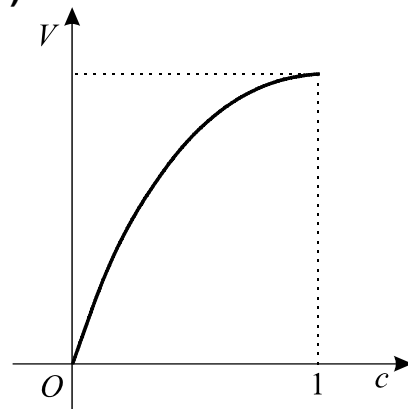
Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função V ?



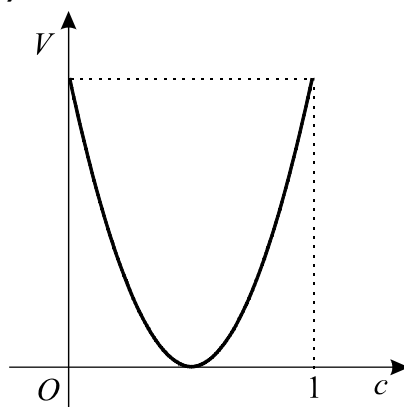
(A)



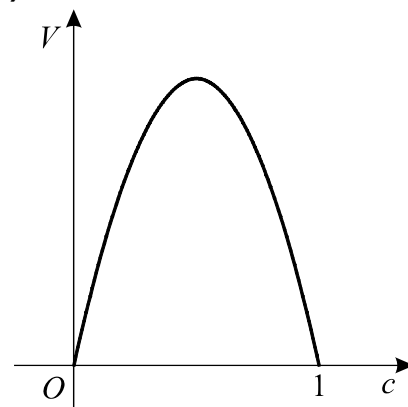
(B)



(C)



(D)



5. Pretende-se dispor, numa prateleira de uma estante, seis livros, dois dos quais são de Astronomia.
De quantas maneiras diferentes o podemos fazer, de tal forma que os dois primeiros livros, do lado esquerdo, sejam os de Astronomia?

(A) 24 (B) 36 (C) 48 (D) 60

6. Na figura A está representado um dado equilibrado, cuja planificação se apresenta esquematizada na figura B.

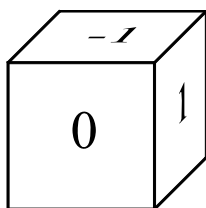


Figura A

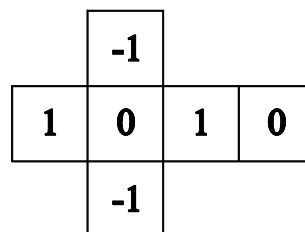


Figura B

Lança-se este dado duas vezes.

Considere as seguintes variáveis aleatórias, associadas a esta experiência:

X_1 : número saído no primeiro lançamento.

X_2 : quadrado do número saído no segundo lançamento.

X_3 : soma dos números saídos nos dois lançamentos.

X_4 : produto dos números saídos nos dois lançamentos.

Uma destas quatro variáveis tem a seguinte distribuição de probabilidades:

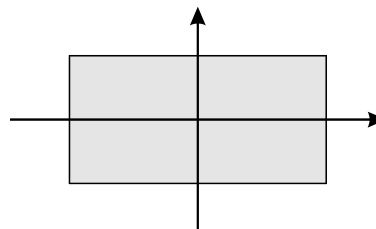
Valores da variável	-1	0	1
Probabilidades	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

Qual delas?

(A) X_1 (B) X_2 (C) X_3 (D) X_4

7. Na figura está representado um rectângulo, de comprimento 4 e largura 2, centrado na origem do plano complexo.

Seja z um número complexo qualquer, cuja imagem geométrica está situada no interior do rectângulo.



Qual dos seguintes números complexos tem também, necessariamente, a sua imagem geométrica no interior do rectângulo?

(A) z^{-1} (B) \bar{z} (C) z^2 (D) $2z$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = 1 + i \quad (i \text{ designa a unidade imaginária}).$$

- 1.1. Determine os números reais b e c para os quais z_1 é raiz do polinómio $x^2 + bx + c$.

- 1.2. Seja $z_2 = \operatorname{cis} \alpha$.

Calcule o valor de α , pertencente ao intervalo $[0, 2\pi]$, para o qual $z_1 \times \overline{z_2}$ é um número real negativo ($\overline{z_2}$ designa o conjugado de z_2).

2. Considere as funções f e g , de domínio \mathbb{R} , definidas por

$$f(x) = \frac{1}{3} + 2e^{1-x} \quad g(x) = 2 \operatorname{sen} x - \cos x$$

- 2.1. Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as duas alíneas seguintes:

- 2.1.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas paralelas aos eixos coordenados.

- 2.1.2. Resolva a equação $f(x) = g(\pi)$, apresentando a solução na forma $\ln(ke)$, onde k representa um número real positivo.
(\ln designa logaritmo de base e)

- 2.2. Recorrendo à calculadora, determine as soluções inteiras da inequação $f(x) > g(x)$, no intervalo $[0, 2\pi]$. Explique como procedeu.

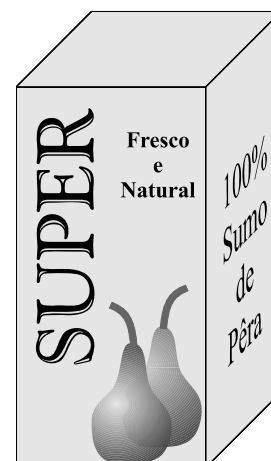
3. Uma nova empresa de refrigerantes pretende lançar no mercado embalagens de sumo de fruta, com capacidade de **dois litros**. Por questões de *marketing*, as embalagens deverão ter a forma de um **prisma quadrangular regular**.

- 3.1. Mostre que a área total da embalagem é dada por

$$A(x) = \frac{2x^3 + 8}{x}$$

(x é o comprimento da aresta da base, em dm)

Nota: recorde que $1 \text{ litro} = 1 dm^3$



- 3.2. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, mostre que existe um valor de x para o qual a área total da embalagem é mínima e determine-o.
4. Seja f uma função de domínio \mathbb{R} , com derivada finita em todos os pontos do domínio, e **crescente**.
Sejam a e b dois quaisquer números reais. Considere as rectas r e s , tangentes ao gráfico de f nos pontos de abcissas a e b , respectivamente.
Prove que as rectas r e s **não** podem ser perpendiculares.
5. Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: Espadas, Copas, Ouros e Paus. Cada naipe tem **três figuras**: Rei, Dama e Valete.
- 5.1. Retirando, ao acaso, seis cartas de um baralho completo, qual é a probabilidade de, entre elas, haver um e um só Rei? Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.
- 5.2. De um baralho completo extraem-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas cartas. Sejam E_1 , C_2 e F_2 os acontecimentos:
- E_1 : sair Espadas na primeira extracção;
 C_2 : sair Copas na segunda extracção;
 F_2 : sair uma figura na segunda extracção.

Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, indique o valor de $P((F_2 \cap C_2) | E_1)$. Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explicita o raciocínio que efectuou. O valor pedido deverá resultar **apenas** da interpretação do significado de $P((F_2 \cap C_2) | E_1)$, no contexto da situação descrita.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I63

Cada resposta certa +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:

Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II137

1. 21
 1.1. 10
 1.2. 11

2. 49
 2.1. 33
 2.1.1. 16
 2.1.2. 17
 2.2. 16

3. 27
 3.1. 10
 3.2. 17

4. 10

5. 30
 5.1. 15
 5.2. 15

TOTAL 200

Formulário

Áreas de figuras planas

$$\text{Losango: } \frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$$

$$\text{Trapézio: } \frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$$

$$\text{Polígono regular: } \text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$$

$$\text{Círculo: } \pi r^2 \quad (r - \text{raio})$$

Áreas de superfícies

$$\text{Área lateral de um cone: } \pi r g \\ (r - \text{raio da base; } g - \text{geratriz})$$

$$\text{Área de uma superfície esférica: } 4 \pi r^2 \\ (r - \text{raio})$$

Volumes

$$\text{Prisma: } \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Cilindro: } \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Pirâmide: } \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Cone: } \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Esfera: } \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (r - \text{raio})$$

Trigonometria

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$

$$\text{cos}(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

Complexos

$$(\rho \text{ cis } \theta) \cdot (\rho' \text{ cis } \theta') = \rho \rho' \text{ cis } (\theta + \theta')$$

$$\frac{\rho \text{ cis } \theta}{\rho' \text{ cis } \theta'} = \frac{\rho}{\rho'} \text{ cis } (\theta - \theta')$$

$$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n \theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

$$\text{Prog. Aritmética: } \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

$$\text{Prog. Geométrica: } u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Regras de derivação

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\text{sen } u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \text{sen } u$$

$$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$