

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO
12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
2003

1.ª FASE
2.ª CHAMADA
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

**Na sua folha de respostas, indique
claramente a versão da prova.**

**A ausência desta indicação implicará a
anulação de todo o GRUPO I.**

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

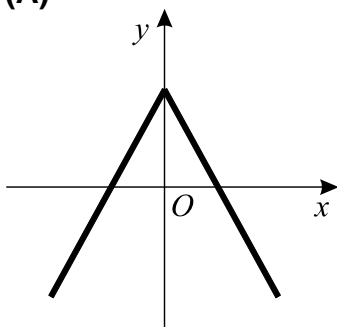
Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Grupo I

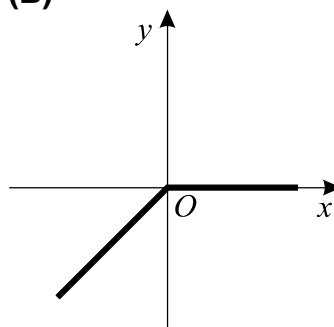
- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico de uma função par, de domínio \mathbb{R} e contradomínio $] -\infty, 0]$?

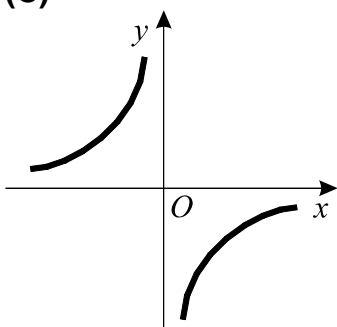
(A)



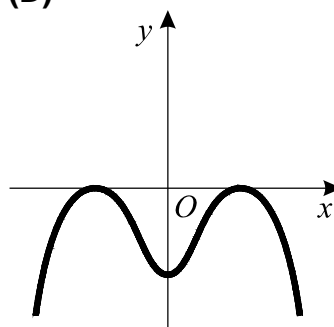
(B)



(C)



(D)

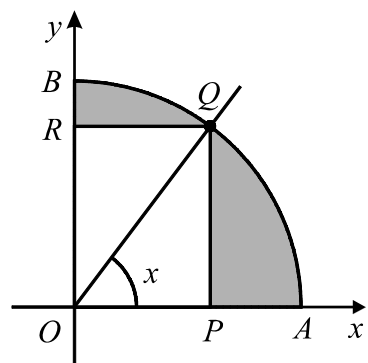


2. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy , um arco de circunferência AB , de centro na origem do referencial.

O ponto Q move-se ao longo desse arco.

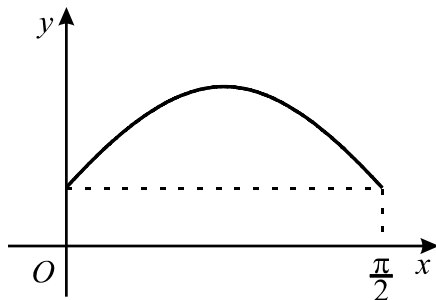
Os pontos P e R , situados sobre os eixos Ox e Oy , respectivamente, acompanham o movimento do ponto Q , de tal forma que o segmento de recta $[PQ]$ é sempre paralelo ao eixo Oy e o segmento de recta $[QR]$ é sempre paralelo ao eixo Ox .

Para cada posição do ponto Q , seja x a amplitude do ângulo AOQ e seja $h(x)$ a área da região sombreada.

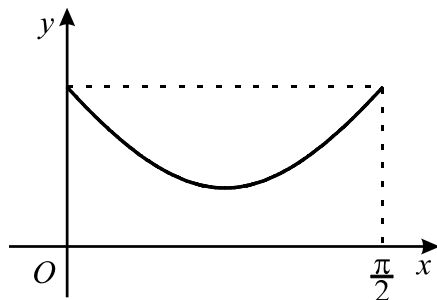


Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função h ?

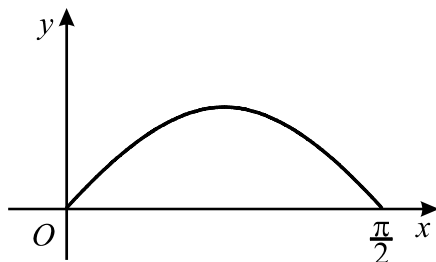
(A)



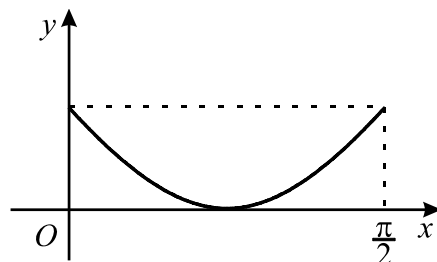
(B)



(C)



(D)



3. Indique o valor de $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_2 x}{e^x - 1}$

(A) 0

(B) 1

(C) $-\infty$

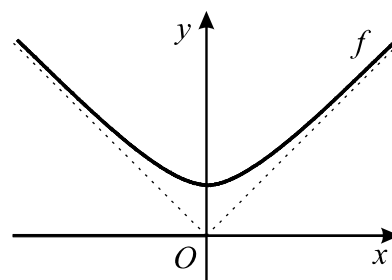
(D) $+\infty$

4. Na figura junta está representada parte do gráfico de uma função f de domínio \mathbb{R} , contínua em todo o seu domínio.

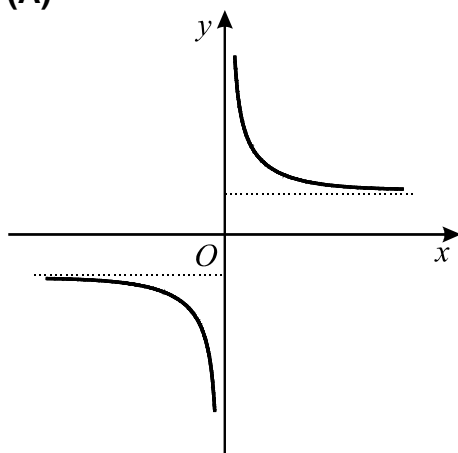
A bissetriz dos quadrantes pares e a bissetriz dos quadrantes ímpares são assintotas do gráfico de f .

Indique em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função g definida por

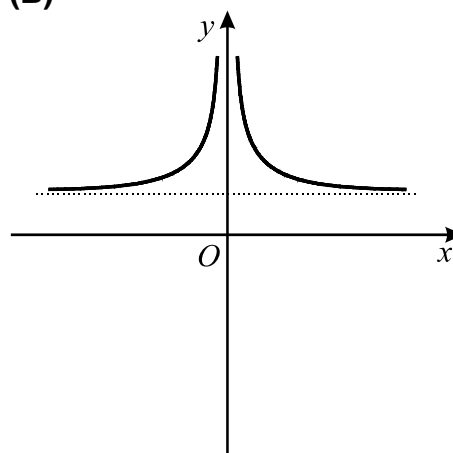
$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$



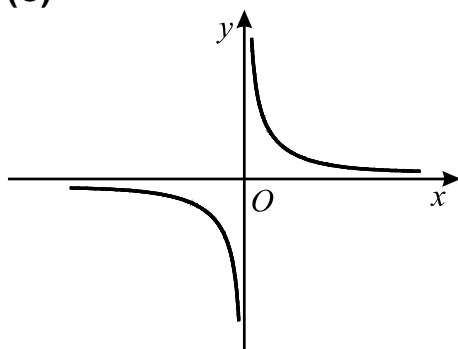
(A)



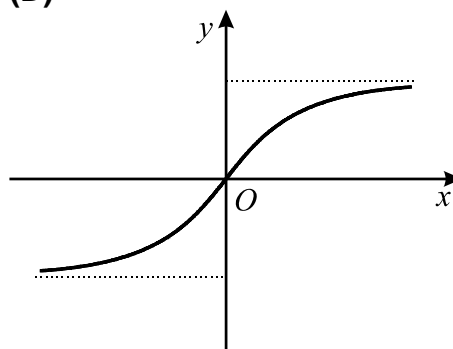
(B)



(C)



(D)



5. O quarto número de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 19 600.

A soma dos quatro primeiros números dessa linha é 20 876.

Qual é o terceiro número da **linha seguinte**?

(A) 1 275

(B) 1 581

(C) 2 193

(D) 2 634

6. Um saco contém bolas azuis, brancas e pretas.

Tira-se, ao acaso, uma bola do saco.

Sejam os acontecimentos:

A – a bola retirada é azul

B – a bola retirada é branca

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A e B são contrários

(B) A e \overline{B} são contrários

(C) A e B são incompatíveis

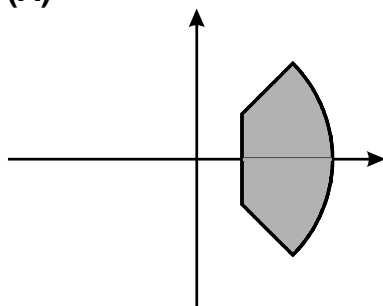
(D) A e \overline{B} são incompatíveis

7. Considere, em \mathbb{C} , a condição:

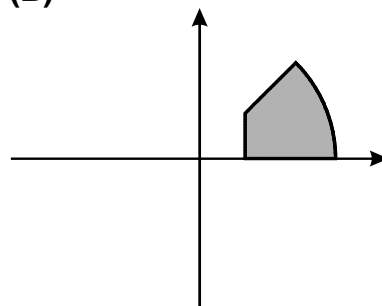
$$|z| \leq 3 \quad \wedge \quad 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \quad \wedge \quad \operatorname{Re} z \geq 1$$

Em qual das figuras seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?

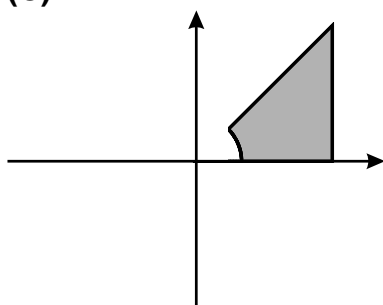
(A)



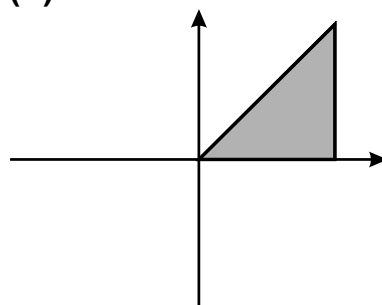
(B)



(C)



(D)



Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. \mathbb{C} é o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

- 1.1. Sem recorrer à calculadora, determine $\frac{(\sqrt{3} - 2i)^2 + \left(2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{9}\right)^3}{\operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}}$ apresentando o resultado na forma algébrica.

- 1.2. Seja α um número real.

Sejam z_1 e z_2 dois números complexos tais que:

- $z_1 = \operatorname{cis} \alpha$
- $z_2 = \operatorname{cis} (\alpha + \pi)$

Mostre que z_1 e z_2 não podem ser ambos raízes cúbicas de um mesmo número complexo.

2. Considere a expressão $f(x) = a + b \sin^2 x$

Sempre que se atribui um valor real a a e um valor real a b , obtemos uma função de domínio \mathbb{R} .

- 2.1. Nesta alínea, considere $a = 2$ e $b = -5$.

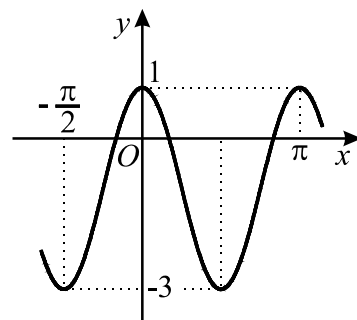
Sabe-se que $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2}$. Sem recorrer à calculadora, calcule $f(\theta)$

- 2.2. Para um certo valor de a e um certo valor de b , a função f tem o seu gráfico parcialmente representado na figura junta.

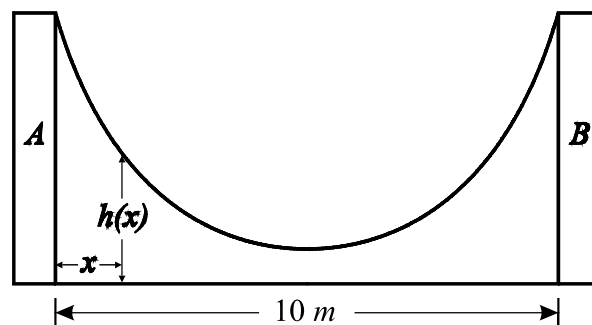
Conforme essa figura sugere, tem-se:

- o contradomínio de f é $[-3, 1]$
- 0 e π são maximizantes
- $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ são minimizantes

Determine a e b .



3. Uma rampa de desportos radicais foi construída entre duas paredes, A e B , distanciadas de 10 metros, como se mostra na figura.



Considere a função h definida por

$$h(x) = 15 - 4 \ln(-x^2 + 10x + 11) \quad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Admita que $h(x)$ é a altura, em metros, do ponto da rampa situado x metros à direita da parede A .

- 3.1. Determine a altura da parede A . Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

Nota: se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

- 3.2. **Sem recorrer à calculadora**, estude a função h quanto à monotonia e conclua daí que, tal como a figura sugere, é num ponto equidistante das duas paredes que a altura da rampa é mínima.

- 3.3. Mostre, analiticamente, que $h(5 - x) = h(5 + x)$.
Interprete esta igualdade no contexto da situação descrita.

4. De uma função f , de domínio \mathbb{R} , sabe-se que a sua derivada é dada por

$$f'(x) = (x + 1)e^x - 10x$$

Seja A o único ponto de inflexão do gráfico de f .

Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine a abcissa do ponto A , arredondada às décimas.

Explique como procedeu. Inclua, na sua explicação, o(s) gráfico(s) que obteve na calculadora.

5. O sangue humano está classificado em quatro grupos distintos: A , B , AB e O .

Independentemente do grupo, o sangue pode possuir, ou não, o factor Rhésus.

Se o sangue de uma pessoa possui este factor, diz-se Rhésus positivo (Rh^+); se não possui este factor, diz-se Rhésus negativo (Rh^-).

Na população portuguesa, os grupos sanguíneos e os respectivos Rhésus estão repartidos da seguinte forma:

	A	B	AB	O
Rh^+	40 %	6,9 %	2,9 %	35,4 %
Rh^-	6,5 %	1,2 %	0,4 %	6,7 %

- 5.1. Escolhido um português ao acaso, qual é a probabilidade de o seu grupo sanguíneo **não** ser o O ? Apresente o resultado sob a forma de percentagem, arredondado às unidades.

- 5.2. Escolhido um português ao acaso, e sabendo que é Rhésus negativo, qual é a probabilidade de o seu grupo sanguíneo ser o A ? Apresente o resultado sob a forma de percentagem, arredondado às unidades.

6. Considere o seguinte problema:

Vinte e cinco jovens (doze rapazes e treze raparigas) pretendem ir ao cinema. Chegadas lá, verificam que existem apenas vinte bilhetes (para duas filas com dez lugares consecutivos em cada uma delas). Comprados os vinte bilhetes, distribuem-nos ao acaso. Como é evidente, cinco jovens irão ficar sem bilhete.

Qual é a probabilidade de uma das filas ficar ocupada só com rapazes e a outra só com raparigas?

Uma resposta correcta para este problema é:
$$\frac{{}^{12}C_{10} \times {}^{13}C_{10} \times 2 \times 10! \times 10!}{{}^{25}C_{20} \times 20!}$$

Numa pequena composição, com cerca de vinte linhas, explique **esta resposta**.

Nota:

Deve organizar a sua composição de acordo com os seguintes tópicos:

- referência à Regra de Laplace;
- explicação do número de casos possíveis;
- explicação do número de casos favoráveis.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I63

Cada resposta certa +9

Cada resposta errada..... - 3

Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II137

1. 21

1.1. 11

1.2. 10

2. 30

2.1. 15

2.2. 15

3. 38

3.1. 6

3.2. 16

3.3. 16

4. 16

5. 16

5.1. 6

5.2. 10

6. 16

TOTAL 200

Formulário

Áreas de figuras planas

$$\text{Losango: } \frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$$

$$\text{Trapézio: } \frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$$

$$\text{Polígono regular: } \text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$$

$$\text{Círculo: } \pi r^2 \quad (r - \text{raio})$$

Áreas de superfícies

$$\text{Área lateral de um cone: } \pi r g \\ (r - \text{raio da base; } g - \text{geratriz})$$

$$\text{Área de uma superfície esférica: } 4 \pi r^2 \\ (r - \text{raio})$$

Volumes

$$\text{Prisma: } \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Cilindro: } \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Pirâmide: } \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Cone: } \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Esfera: } \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (r - \text{raio})$$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

Complexos

$$(\rho \operatorname{cis} \theta) \cdot (\rho' \operatorname{cis} \theta') = \rho \rho' \operatorname{cis} (\theta + \theta')$$

$$\frac{\rho \operatorname{cis} \theta}{\rho' \operatorname{cis} \theta'} = \frac{\rho}{\rho'} \operatorname{cis} (\theta - \theta')$$

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis} (n \theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

$$\text{Prog. Aritmética: } \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

$$\text{Prog. Geométrica: } u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$