

**EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO**  
**12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)**  
**Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos**

**Duração da prova: 120 minutos**  
**2003**

**2.ª FASE**  
**VERSÃO 1**

**PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA**

---

**VERSÃO 1**

**Na sua folha de respostas, indique  
claramente a versão da prova.**

**A ausência desta indicação implicará a  
anulação de todo o GRUPO I.**

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

**Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.**

## Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. De uma função  $f$ , de domínio  $[-4, 5]$  e **contínua** em todo o domínio, sabe-se que:

- $f(-4) = 6$ ;  $f(2) = -1$ ;  $f(5) = 1$
- $f$  é estritamente decrescente no intervalo  $[-4, 2]$
- $f$  é estritamente crescente no intervalo  $[2, 5]$

Quantas soluções tem a equação  $f(x) = 0$ ?

- (A) 0                      (B) 1                      (C) 2                      (D) 3

2. Seja  $g$  uma função, de domínio  $A$ , definida por  $g(x) = \ln(1 - x^2)$

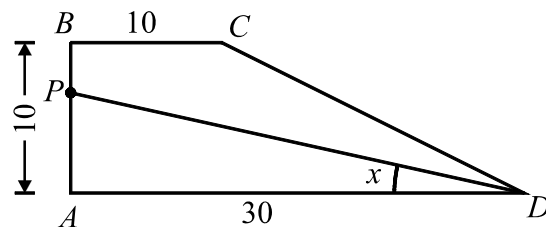
Qual dos seguintes poderá ser o conjunto  $A$ ?

- (A)  $] -e + 1, e - 1[$                       (B)  $] -1, 1[$   
(C)  $] 0, +\infty[$                       (D)  $] -\infty, 1[$

3. Seja  $f$  uma função de domínio  $\mathbb{R}$ , e seja  $g$  a função definida por  $g(x) = f(x + 1)$ .  
A recta de equação  $y = 2x + 4$  é a única assíntota do gráfico de  $f$ .  
Qual das seguintes é uma equação da única assíntota do gráfico de  $g$ ?

- (A)  $y = 2x + 6$  (B)  $y = 2x + 4$   
(C)  $y = 2x - 4$  (D)  $y = 2x - 6$

4. Na figura está representado um trapézio rectângulo  $[ABCD]$ , cujas bases têm 10 e 30 unidades de comprimento e a altura tem 10 unidades de comprimento.



Considere que um ponto  $P$  se desloca sobre o lado  $[AB]$ .  
Para cada posição do ponto  $P$ , seja  $x$  a amplitude, em radianos, do ângulo  $PDA$ .  
Pretende-se determinar o valor de  $x$  para o qual o segmento  $[PD]$  divide o trapézio em duas figuras com a mesma área.  
Qual das equações seguintes traduz este problema?

- (A)  $\frac{30^2 \operatorname{sen} x}{2} = 100$  (B)  $\frac{30^2 \operatorname{tg} x}{2} = 100$   
(C)  $\frac{30 \times 10 \operatorname{sen} x}{4} = 150$  (D)  $\frac{30 \times 10 \operatorname{tg} x}{4} = 150$

5. Considere a linha do Triângulo de Pascal em que o segundo elemento é 35.  
Escolhem-se, ao acaso, dois elementos dessa linha.  
Qual é a probabilidade de estes dois elementos serem iguais?

- (A)  $\frac{19}{{}^{35}C_2}$  (B)  $\frac{35}{{}^{36}C_2}$  (C)  $\frac{1}{{}^{35}C_2}$  (D)  $\frac{18}{{}^{36}C_2}$

6. A Patrícia tem uma caixa com cinco bombons de igual aspecto exterior, mas só um é que tem licor. A Patrícia tira, ao acaso, um bombom da caixa, come-o e, se não for o que tem licor, experimenta outro. Vai procedendo desta forma até encontrar e comer o bombom com licor.

Seja  $X$  a variável aleatória «número de bombons **sem licor** que a Patrícia come».

Qual é a distribuição de probabilidades da variável  $X$  ?

(A)

$x_i$	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

(B)

$x_i$	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,4

(C)

$x_i$	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

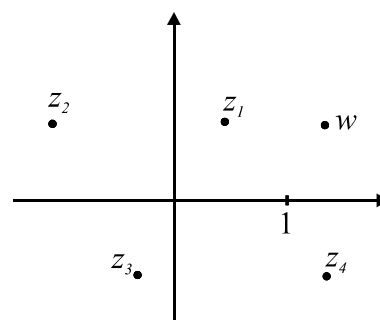
(D)

$x_i$	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,4

7. Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos:

$w, z_1, z_2, z_3$  e  $z_4$

Qual é o número complexo que pode ser igual a  $1 - w$  ?



- (A)  $z_1$                       (B)  $z_2$                       (C)  $z_3$                       (D)  $z_4$

## Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. •  $\mathbb{C}$  é o conjunto dos números complexos  
•  $i$  designa a unidade imaginária

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, calcule, na forma trigonométrica, as raízes quartas do número complexo  $1 + \sqrt{3}i$ , simplificando o mais possível as expressões obtidas.

1.2. Seja  $z$  um número complexo cuja imagem geométrica, no plano complexo, é um ponto  $A$  situado no segundo quadrante e pertencente à recta definida pela condição  $Re(z) = -2$ .

Seja  $B$  a imagem geométrica de  $\bar{z}$ , conjugado de  $z$ .

Seja  $O$  a origem do referencial.

**Represente**, no plano complexo, um triângulo  $[AOB]$ , de acordo com as condições enunciadas.

Sabendo que a área do triângulo  $[AOB]$  é 8, **determine**  $z$ , na forma algébrica.

2. Admita que, ao longo dos séculos XIX e XX e dos primeiros anos do século XXI, a população de Portugal Continental, em milhões de habitantes, é dada, aproximadamente, por

$$p(t) = 3,5 + \frac{6,8}{1 + 12,8 e^{-0,036t}}$$

(considere que  $t$  é medido em anos e que o instante  $t = 0$  corresponde ao **início** do ano 1864).

2.1. De acordo com este modelo, qual será a população de Portugal Continental no **final** do presente ano (2003)?

Apresente o resultado em milhões de habitantes, arredondado às décimas.

**Nota:** sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2.2. **Sem recorrer à calculadora** (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), resolva o seguinte problema:

De acordo com este modelo, em que ano a população de Portugal Continental foi de 3,7 milhões de habitantes?

**Nota:** sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3. Considere a função  $f$ , de domínio  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ , definida por

$$f(x) = x + \sin x$$

**Sem recorrer à calculadora**, resolva as três alíneas seguintes.

- 3.1. Utilizando a definição de derivada de uma função num ponto, calcule  $f'(0)$ .
- 3.2. Estude a função  $f$  quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.
- 3.3. Determine os valores de  $x$ , pertencentes ao intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ , tais que
- $$f(x) = x + \cos x$$

4. De um baralho de cartas, seleccionam-se seis cartas do naipe de Espadas: Ás, Rei, Dama, Valete, Dez e Nove.

Dispõem-se as seis cartas, em fila, em cima de uma mesa.

- 4.1. Quantas disposições diferentes podem ser feitas, de modo que as duas cartas do meio sejam o Ás e o Rei (não necessariamente por esta ordem)?
- 4.2. Quantas disposições diferentes podem ser feitas, de modo que o Rei não fique ao lado da Dama?

5. Seja  $S$  o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos possíveis ( $A \subset S$  e  $B \subset S$ ).

Sabe-se que:

- $P(A \cap B) = 0,1$
- $P(A \cup B) = 0,8$
- $P(A|B) = 0,25$

Prove que  $A$  e  $\overline{A}$  são acontecimentos equiprováveis.

( $P$  designa probabilidade,  $\overline{A}$  designa o acontecimento contrário de  $A$  e  $P(A|B)$  designa probabilidade de  $A$ , se  $B$ ).

**6.** A Rita está a participar num concurso de lançamentos de papagaios de papel.

No regulamento do concurso, estão as condições de apuramento para a final, que se reproduzem a seguir.

Após um certo instante, indicado pelo júri:

- o papagaio não pode permanecer no ar mais do que um minuto;
- o papagaio tem de permanecer, pelo menos durante doze segundos seguidos, a uma altura superior a dez metros;
- o papagaio tem de ultrapassar os vinte metros de altura.



Admita que a distância, em metros, do papagaio da Rita ao solo,  $t$  **segundos** após o instante indicado pelo júri, é dada por

$$d(t) = 9,5 + 7 \sin\left(\frac{t^2}{200}\right) + 5 \cos\left(\frac{t}{4}\right)$$

(os argumentos das funções seno e co-seno estão expressos em radianos).

Note-se que, a partir do instante em que o papagaio atinge o solo, a distância do papagaio ao solo deixa de ser dada por esta expressão, uma vez que passa a ser (naturalmente) igual a zero.

**Deverá a Rita ser apurada para a final?**

Utilize a calculadora para investigar esta questão. Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explicita as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. **Inclua, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos** (coordenadas arredondadas às décimas).

**FIM**



## COTAÇÕES

**Grupo I .....63**

Cada resposta certa ..... +9  
Cada resposta errada..... - 3  
Cada questão não respondida ou anulada ..... 0

**Nota:** um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

**Grupo II .....137**

1. .... 21  
    1.1. .... 11  
    1.2. .... 10

2. .... 26  
    2.1. .... 10  
    2.2. .... 16

3. .... 42  
    3.1. .... 14  
    3.2. .... 14  
    3.3. .... 14

4. .... 20  
    4.1. .... 10  
    4.2. .... 10

5. .... 12

6. .... 16

**TOTAL ..... 200**



## Formulário

### Áreas de figuras planas

Losango:  $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio:  $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular:  $Semiperímetro \times Apótema$

Círculo:  $\pi r^2$  ( $r$  – raio)

### Áreas de superfícies

Área lateral de um cone:  $\pi r g$   
( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

Área de uma superfície esférica:  $4 \pi r^2$   
( $r$  – raio)

### Volumes

Prisma:  $Área\ da\ base \times Altura$

Cilindro:  $Área\ da\ base \times Altura$

Pirâmide:  $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone:  $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera:  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ( $r$  – raio)

### Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

### Complexos

$$(\rho \operatorname{cis} \theta) \cdot (\rho' \operatorname{cis} \theta') = \rho \rho' \operatorname{cis} (\theta + \theta')$$

$$\frac{\rho \operatorname{cis} \theta}{\rho' \operatorname{cis} \theta'} = \frac{\rho}{\rho'} \operatorname{cis} (\theta - \theta')$$

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis} (n \theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n-1\}$$

### Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma

Prog. Aritmética:  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica:  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

### Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

### Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$